❄ Banque filière PT ❄

Epreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

L'usage des machines à calculer est interdit.

Toutes les réponses seront justifiées.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction

Dans tout le problème, p, q et f désignent trois fonctions définies et continues sur $[0,1]$ telles que p est de classe C^1 (continûment dérivable) sur $[0,1]$ et vérifiant :

$$\forall x \in [0,1], \quad p(x) > 0 \quad \text{et} \quad q(x) \geq 0 .$$

I. Préliminaires.

1. Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$ et dont la norme euclidienne associée est notée $\|\ \ \|$. Prouver que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad 2\,\langle x,y\rangle = \| x+y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2 .$$

2. a. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad |\langle x,y\rangle| \leq \| x \|\, \| y \| .$$

(On pourra s'intéresser à la fonction $\lambda \mapsto \| \lambda x + y \|^2$ de la variable réelle λ.)

b. Montrer que $|\langle x,y\rangle| = \| x \|\, \| y \|$ si et seulement si $\{x,y\}$ est une famille liée de E.

c. En déduire que si f et g sont deux fonctions réelles continues sur $[0,a]$ (où a est un réel strictement positif),

$$\left| \int_0^a f(t)g(t)\,dt \right| \leq \sqrt{\left(\int_0^a f^2(t)\,dt \right) \left(\int_0^a g^2(t)\,dt \right)} \quad .$$

3. Soit E un espace vectoriel réel, N une application de E dans $\mathbb{R}$ à valeurs positives ou nulles et vérifiant $\forall x \in E,\ N(x) = N(-x)$.
On pose $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(N^2(x+y) - N^2(x) - N^2(y)\right)$ et on suppose que φ est un produit scalaire.
Après avoir vérifié que $N(0_E)$ est nul (où 0_E désigne l'élément nul de E), prouver que N est la norme euclidienne associée à φ.

II. Equivalence de normes.

1. Justifier l'existence de trois réels positifs p_0, p_1 et q_1 tels que :

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1 \quad \text{et} \quad q(x) \leq q_1 .$$

2. Soit H l'espace vectoriel réel formé des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et en 1, c'est-à-dire :

$$H = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ u(0) = u(1) = 0\} .$$

Pour tout couple (u, v) de fonctions de H, on pose :

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \int_0^1 \Big(u(t)v(t) + u'(t)v'(t) \Big)\, dt , \\ b(u, v) &= \int_0^1 \Big(q(t)u(t)v(t) + p(t)u'(t)v'(t) \Big)\, dt , \\ L(v) &= \int_0^1 f(t)v(t)\, dt . \end{aligned}$$

a. Vérifier que L est une forme linéaire sur H.

b. Montrer que $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ est un produit scalaire sur H. On pose alors :

$$\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad .$$

c. Montrer que $(u, v) \mapsto b(u, v)$ est un produit scalaire sur H.

3. a. Prouver, en utilisant la question **I(2)c**, l'existence d'un réel γ positif tel que :

$$\forall v \in H, \ | L(v) | \leq \gamma \| v \| .$$

b. Prouver de même l'existence d'un réel δ strictement positif tel que :

$$\forall (u, v) \in H^2, \ | b(u, v) | \leq \delta \| u \| \| v \| .$$

4. a. Prouver à l'aide de la question **I(2)c** que pour toute fonction v de H et pour tout réel x de $[0,1]$,

$$v^2(x) \leq x \int_0^1 v'^2(t)\, dt .$$

b. En déduire que :

$$\forall v \in H, \ p_0 \| v \|^2 \leq \frac{3}{2} b(v, v) .$$

5. Soient u_1 et u_2 des fonctions de H vérifiant $\forall v \in H, \quad b(u_1, v) = L(v) = b(u_2, v)$. Prouver que $u_1 = u_2$.

6. Soit G l'espace vectoriel réel formé des fonctions réelles continues, $\mathcal{C}^1$ par morceaux s'annulant en 0 et 1, c'est à dire :

$$G = \{u \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}),\ u(0) = u(1) = 0 \ , u \text{ est } C^1 \text{ par morceaux sur } [0,1]\}.$$

a. Après avoir rappelé la définition d'une fonction C^1 par morceaux sur $[0,1]$, montrer que $\langle u, v \rangle$ et $b(u, v)$ peuvent être définies lorsque u et v sont éléments de G.

b. Vérifier que $b(v,v) = 0$ avec $v \in G$ si et seulement si $\forall x \in [0,1],\ v(x) = 0$.

On admet que $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle$ et $(u,v) \mapsto b(u,v)$ sont encore des produits scalaires sur G et on continue à noter $\|\ \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

III. Equation de Sturm-Liouville.

On s'intéresse aux solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ de :

$$\forall x \in [0,1].\ -\frac{d}{dx}\Big(p(x)u'(x)\Big) + q(x)u(x) = f(x) \tag{1}$$

vérifiant de plus

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{2}$$

On admet dans toute la suite que les fonctions p, q et f sont choisies de telle sorte qu'il existe au moins une solution de l'équation différentielle (1) vérifiant les conditions initiales (2).

1. Résoudre le problème posé lorsque $p(x) = e^{-\alpha x}$ (avec α réel non nul), $q(x) = 0$ et $f(x) = -2n_0\pi\cos(2n_0\pi x)$ (avec n_0 entier naturel non nul).
2. On revient au cas général. Soit u une solution du problème posé (c'est-à-dire vérifiant (1) et (2)), prouver que :

$$\forall v \in H,\ b(u,v) = L(v)\ . \tag{3}$$

En déduire que l'équation (3) admet une unique solution u dans H.

3. On pose, pour tout élément v de H, $J(v) = \dfrac{1}{2}\,b(v,v) - L(v)$ et on désigne par u l'unique solution de (3) dans H.
   a. En calculant $J(u+w)$ avec $w \in H$, prouver que

$$\forall v \in H,\ J(u) \leq J(v)\ .$$

   b. Réciproquement, soit u_0 un élément de H tel que $\forall v \in H,\ J(u_0) \leq J(v)$. Etablir, en calculant $J(u_0 + \lambda w)$ pour tout réel λ, que :

$$\forall w \in H,\ b(u_0,w) = L(w)\ .$$

   u est donc l'unique fonction de H réalisant le minimum de J sur H.
4. On désigne par W un sous-espace vectoriel de G de dimension d de base $(\varphi_i)_{1\leq i\leq d}$ et par π_W la projection orthogonale sur W pour le produit scalaire b.
   a. Montrer que $\forall w \in W,\ b(\pi_W(u) - u, \pi_W(u) - u) \leq b(w-u, w-u)$.
   b. Prouver que $u_W = \pi_W(u)$ si et seulement si u_W est élément de W et vérifie

$$\forall v \in W,\ b(u_W, v) = L(v)\ .$$

   c. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ les composantes de u_W dans la base $(\varphi_i)_{1\leq i\leq d}$. Montrer que ces composantes sont solutions du système :

$$\forall i \in [1,d],\ \sum_{j=1}^{d} b(\varphi_i,\varphi_j)\alpha_j = L(\varphi_i)\ . \tag{4}$$

   Prouver que ce système est un système de Cramer.

IV. Approximations de la solution u.

Soit n un entier naturel non nul : on pose $h = \dfrac{1}{n+1}$ et pour tout entier naturel i, $x_i = ih$. De plus, pour i compris entre 1 et n, on désigne par φ_i la fonction définie par :

$$\begin{cases} x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \Rightarrow & \varphi_i(x) = 1 - \dfrac{|x - x_i|}{h} \\ x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \Rightarrow & \varphi_i(x) = 0. \end{cases}$$

1. a. Tracer le graphe d'une fonction φ_i et vérifier que pour tout i, φ_i est élément de G.

   b. Soit W_n le sous-espace de G engendré par la famille $\{\varphi_i\}_{1 \le i \le n}$.

   Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{n} t_i \varphi_i$ un élément de W_n. Quelle est la valeur de t_i ? En déduire que les fonctions $(\varphi_i)_{1 \le i \le n}$ forment une base de W_n.

   c. Prouver que si $|j - i| \ge 2$, $b(\varphi_i, \varphi_j) = 0$.

2. Dans cette question, $p(x) = e^{-\alpha x}$ (avec α réel non nul) et $q(x) = 0$.

   a. Calculer $b(\varphi_i, \varphi_j)$ pour $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n$.

   b. Calculer alors le déterminant du système (4) lorsque $n = 2$ et retrouver que dans ce cas particulier ce système est un système de Cramer.

3. On pose $w_n = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)\varphi_i$.

   a. Etablir l'égalité suivante, pour $1 \le i \le n+1$:

   $$\forall x \in [x_{i-1}, x_i],\ u(x) - w_n(x) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y}^{t} u''(z)\, dz \right) dy \right) dt\,.$$

   b. En déduire à l'aide d'une inégalité donnée par la question **I(2)c** que :

   $$\forall x \in [x_{i-1}, x_i],\ |u(x) - w_n(x)| \le h^{\frac{3}{2}} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(z))^2\, dz \right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

   c. Prouver de même que :

   $$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[,\ |u'(x) - w_n'(x)| \le h^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(z))^2\, dz \right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

4. Montrer alors que :

   $$\| u - w_n \| \le \frac{\sqrt{5}\, h}{2} \left(\int_0^1 (u''(z))^2\, dz \right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

   Quelle interprétation vous suggère cette inégalité ?
   Rappel : $\| \ \|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

V. Appendice.

Ce problème provient de la modélisation des vibrations de cordes fixées aux deux extrémités. La recherche d'une solution sous forme de série conduit à la résolution d'un problème de Sturm-Liouville où u est le déplacement vertical en un point d'abscisse x, p et q sont des caractéristiques de la corde et f est liée aux forces appliquées à la corde.